Boutique pour l'étude des mathématiques
IREM d'Aix-Marseille

Réponse écrite à la question d'un élève de 3e : “ Sinus, cosinus, comment faisaient-ils avant la calculatrice ? ”

Avant que la calculatrice devienne d'un usage courant dans les classes de l'enseignement secondaire français, c'est-à-dire avant le début des années 1980, lorsqu'on avait à calculer les sinus, cosinus, tangentes de certains angles, on recourait à l'utilisation d'une table trigonométrique ou parfois, au Lycée, à l'utilisation d'une règle à calcul.
Voici ci-dessous la photocopie d'une page d'un manuel de mathématiques de 3e (Collection A. Mauguin, Istra), édité en 1980, et utilisé par les élèves jusqu'en 1989. Comme on le voit dans les 2e et 3e, la recherche des valeurs approchées du sinus, ou du cosinus, d'un angle dont la mesure en degré n'est pas un nombre entier, ou de la mesure d'angle dont on connaît le sinus, ou le cosinus, ne sont pas si simples qu'on pourrait penser ; en tout cas, pas aussi simples et rapides que nous le permet aujourd'hui la calculatrice. Elles nécessitent un calcul faisant intervenir une fonction affine, et que l'on nomme une interpolation linéaire.

Table trigonométrique

unité : le degré

Degrés	Sinus	Tangente	Cotangente	Cosinus	
1	0,017	0,017	57,29	1,000	**89**
2	0,035	0,035	28,64	0,999	**88**
3	0,052	0,052	19,08	0,999	**87**
4	0,070	0,070	14,30	0,998	**86**
5	0,087	0,087	11,43	0,996	**85**
6	0,105	0,105	9,514	0,995	**84**
7	0,122	0,123	8,144	0,993	**83**
8	0,139	0,141	7,115	0,990	**82**
9	0,156	0,158	6,314	0,988	**81**
10	0,174	0,176	5,671	0,985	**80**
11	0,191	0,194	5,145	0,982	**79**
12	0,208	0,213	4,705	0,978	**78**
13	0,225	0,231	4,331	0,974	**77**
14	0,242	0,249	4,011	0,970	**76**
15	0,259	0,268	3,732	0,966	**75**
16	0,276	0,287	3,487	0,961	**74**
17	0,292	0,306	3,271	0,956	**73**
18	0,309	0,325	3,078	0,951	**72**
19	0,326	0,344	2,904	0,946	**71**
20	0,342	0,364	2,747	0,940	**70**
21	0,358	0,384	2,605	0,934	**69**
22	0,375	0,404	2,475	0,927	**68**
23	0,391	0,424	2,356	0,921	**67**
24	0,407	0,445	2,246	0,914	**66**
25	0,423	0,466	2,145	0,906	**65**
26	0,438	0,488	2,050	0,899	**64**
27	0,454	0,510	1,963	0,891	**63**
28	0,469	0,532	1,881	0,883	**62**
29	0,485	0,554	1,804	0,875	**61**
30	0,500	0,577	1,732	0,866	**60**
31	0,515	0,601	1,664	0,857	**59**
32	0,530	0,625	1,600	0,848	**58**
33	0,545	0,649	1,540	0,839	**57**
34	0,559	0,675	1,483	0,829	**56**
35	0,574	0,700	1,428	0,819	**55**
36	0,588	0,727	1,376	0,809	**54**
37	0,602	0,754	1,327	0,799	**53**
38	0,616	0,781	1,280	0,788	**52**
39	0,629	0,810	1,235	0,777	**51**
40	0,643	0,839	1,192	0,766	**50**
41	0,656	0,869	1,150	0,755	**49**
42	0,669	0,900	1,111	0,743	**48**
43	0,682	0,933	1,072	0,731	**47**
44	0,695	0,966	1,036	0,719	**46**
45	0,707	1,000	1,000	0,707	**45**
	Cosinus	Cotangente	Tangente	Sinus	Degrés

A. Pratique de la table en degrés.

1. ***a)*** On fait figurer sur une même table toutes les images des angles de 1° à 89°. En fait, ce sont des valeurs approchées par défaut ou par excès des images.
Aussi écrit-on : $\sin 20° \simeq 0,342$ ($\simeq$ se lit sensiblement égal à)
au lieu de : $\sin 20° = 0,342$.

b) La colonne notée, en haut, sinus et, en bas, cosinus :
- lue, de haut en bas, donne des valeurs approchées de sin 1° jusqu'à sin 45° ; $\sin 36° \simeq 0,588$ et $\sin 22° \simeq 0,375$;
- lue, de bas en haut, donne des valeurs approchées de cos 45° jusqu'à cos 89° ; $\cos 54° \simeq 0,588$ et $\cos 68° \simeq 0,375$;

c) La colonne notée, en haut, tangente et, en bas, cotangente :
- lue, de haut en bas, donne des valeurs approchées de tg 1° jusqu'à tg 45° ; $\text{tg } 34° \simeq 0,675$ et $\text{tg } 11° \simeq 0,194$;
- lue, de bas en haut, donne des valeurs approchées de cotg 45° jusqu'à cotg 89° ; $\text{cotg } 56° \simeq 0,675$ et $\text{cotg } 79° \simeq 0,194$;

d) La colonne notée, en haut, cotangente et, en bas, tangente :
- lue, de haut en bas, donne des valeurs approchées de cotg 1° jusqu'à cotg 45° ; $\text{cotg } 16° \simeq 3,487$ et $\text{cotg } 40° \simeq 1,192$;
- lue, de bas en haut, donne des valeurs approchées de tg 45° jusqu'à tg 89° ; $\text{tg } 50° \simeq 1,192$ et $\text{tg } 74° \simeq 3,487$;

e) La colonne notée, en haut, cosinus et, en bas, sinus :
- lue, de haut en bas, donne des valeurs approchées de cos 1° jusqu'à cos 45° ; $\cos 36° \simeq 0,809$ et $\cos 25° \simeq 0,906$;
- lue, de bas en haut, donne des valeurs approchées de sin 45° jusqu'à sin 89° ; $\sin 54° \simeq 0,809$ et $\sin 65° \simeq 0,906$.

2. Comment trouver une image

a) Si le réel est entier, on vient de le voir.

b) *Calculez y tel que :* $y = \sin 27,2°$. La table donne :
$\sin 27° \simeq 0,454$
$\sin 28° \simeq 0,469$ D'où la correspondance : $\begin{cases} 27 \longmapsto 0,454 \\ 28 \longmapsto 0,469 \end{cases}$

On admet qu'entre 27° et 28° la représentation graphique de l'applicatio sinus coïncide avec celle de l'application affine telle que :
$27 \longmapsto 0,454$; $28 \longmapsto 0,469$; $27,2 \longmapsto y$.
Comme pour l'application affine, les accroissements sont proportionnels, on a
$$\frac{28-27}{0,469-0,454} = \frac{27,2-27}{y-0,454} \text{ ou } \frac{1}{0,015} = \frac{0,2}{y-0,454} \text{ ; d'où : } \boxed{y \simeq 0,457}$$

3. Comment trouver un antécédent

Déterminez x tel que : $\cos x° = 0,448$.
On a : $64 \longmapsto 0,438$; $63 \longmapsto 0,454$; $x \longmapsto 0,448$.
On admet que dans l'intervalle [63 ; 64] les accroissements sont prop tionnels :
$$\frac{64-63}{0,438-0,454} = \frac{x-63}{0,448-0,454} \text{ ou } \frac{1}{-0,016} = \frac{x-63}{-0,006} \text{ ; d'où : } \boxed{x° \simeq 63,}$$

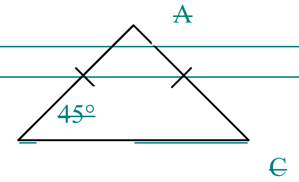
La question qui se pose est donc la suivante : “ comment les mathématiciens ont-ils fait, au cours des siècles qui séparent les inventions de la trigonométrie et de la calculatrice, soit plus de 2000 ans, pour parvenir à construire des tables de trigonométrie ? ”. Remarquons que l’on pourrait aussi se poser une question de même nature à propos de la calculatrice, en se demandant : “ quels sont les calculs mathématiques, donc inventés par des mathématiciens, que la calculatrice doit faire pour nous fournir les résultats trigonométriques qu’on lui demande ? ”

Une réponse simple, et qui peut satisfaire celui qui ne recherche pas une grande précision, consiste à dessiner des triangles rectangles dont un angle a une mesure donnée, à mesurer les longueurs, puis à calculer pour cet angle, ses sinus, cosinus, tangente, en utilisant les relations trigonométriques dans le triangle rectangle.
Mais en fait, comme on a recherché parce qu’on en avait besoin, la justesse et la précision les plus grandes possibles, la question relative à l’élaboration des tables de trigonométrie a parcouru les quelque 2000 ans que nous avons évoqués. Elle est donc intimement liée à l’histoire des mathématiques, et les réponses qui lui ont été apportées, souvent nécessitées elles-mêmes par le besoin de savoir faire certains calculs, dépassent pour beaucoup d’entre elles le niveau du Collège et du Lycée. Nous allons donc nous limiter à l’exposé incomplet de quelques idées qui permettront de comprendre comment des mathématiciens ont dû procéder pour bâtir des tables de trigonométrie.

Pour cela, il faut conserver à l’esprit que le calcul mathématique, appuyé sur certains résultats connus sous le nom de théorèmes, permet, dès le programme de 3e, de connaître les valeurs exactes des cosinus, sinus et tangentes de certains angles.

Ainsi, l’application du théorème de Pythagore dans un triangle rectangle isocèle, c’est-à-dire dont les angles à la base mesurent 45°, permet d’obtenir les sinus, cosinus et tangente de 45 °, soit :

cos. 45°=sin. 45°=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ et tan. 45°=1

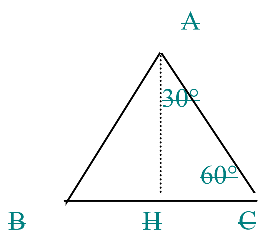


Dans ABC isocèle et rectangle en A, on a BC=$a\sqrt{2}$ (d’après le théorème de Pythagore), a étant la longueur commune des côtés [AB] et [AC] et les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ étant égaux à 45°.

D’où cos. $\hat{B}$=sin. $\hat{B}$=$\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Il en est de même pour l’application du théorème de Pythagore dans un triangle rectangle obtenu en traçant une médiatrice dans un triangle équilatéral.

Dans ABC équilatéral de médiatrice (AH) et de côté a, d’après le théorème de Pythagore appliqué à AHC rectangle en H, on peut obtenir la longueur AH.



On obtient alors AH=$\frac{\sqrt{3}}{2}$ a

cos. 60°=sin. 30°=$\frac{HC}{AC}=\frac{\frac{1}{2}a}{a}=\frac{1}{2}$,

cos. 30°=sin. 60°=$\frac{AH}{AC}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

Ces dernières relations fournissent tan. 30°=$\frac{\sqrt{3}}{3}$ et tan. 60°=$\sqrt{3}$.

Il est par ailleurs facile d’obtenir les lignes trigonométriques de 0° et de 90° (cos.0°=sin.90°=1 et cos.90°=sin.0°=0). De plus, les connaissant pour certains angles, par exemple inférieurs à 45°, il est aussi facile de les obtenir pour tous les autres angles.

Par exemple, comme cos. (90°-x)=sin. x, la connaissance de sin. 7,5° permet la connaissance de cos. 82,5° car cos. 82,5°=cos. (90°-7,5°)=sin. 7,5°. Il en est de même pour tous les angles de 0° à 45° qui, lorsqu'on les connaît, nous fourniront ainsi les lignes trigonométriques de leurs complémentaires ; ce qui permettra de couvrir le champ de tous les angles de 0° à 90°. Les tables trigonométriques, comme celle reproduite précédemment, utilisent ce principe.

On voit donc que, grâce à l'utilisation de certains théorèmes, le problème se simplifie un peu puisque connaissant les valeurs des cosinus et sinus d'angles inférieurs à 45°, il est réglé. On peut même le simplifier encore d'un niveau car il suffit de connaître seulement le cosinus, ou seulement le sinus, pour pouvoir calculer le nombre manquant, c'est-à-dire soit le sinus, soit le cosinus.

En effet, si je sais que sin. 22,5°=$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, je peux calculer cos. 22,5° en me servant de la relation fondamentale de la trigonométrie cos.^{2}x + sin.^{2}x = 1 qui, appliquée au calcul de cos. 22,5°, donne :

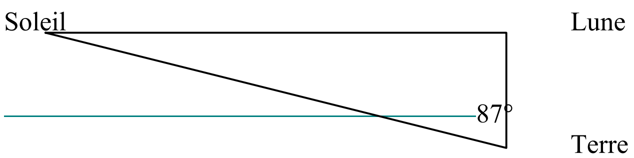
cos.^{2} 22,5° = 1 - sin.^{2} 22,5° = 1 - $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ = $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Comme le cosinus de 22,5° est positif, j'en déduis alors :

cos. 22.5°=$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Mais reste entier le difficile problème du calcul d'une des lignes trigonométriques (sinus ou cosinus seulement) d'angles quelconques inférieurs à 45°, par exemple le calcul de sin. 22,5° pour lequel on ne sait pas encore comment obtenir la valeur ($\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$) !

Une première solution est amenée par l'astronome grec Hipparque, qui vécut au II^e siècle avant J-C, et qui est d'ailleurs considéré comme l'inventeur de la trigonométrie.
Pour comprendre pourquoi c'est un astronome qui inventa la trigonométrie et produisit certains de ses résultats, il faut garder à l'esprit qu'un des intérêts de la trigonométrie est de permettre le calcul de distances entre deux objets matériellement inaccessibles (hauteur d'une montagne, d'un arbre ou d'une tour, largeur d'une rivière, distance en mer, etc.). Ainsi, le problème que se posait l'astronome Hipparque était-il le calcul des distances entre la Terre, la Lune et le Soleil, les deux derniers de ces objets étant évidemment inaccessibles, quoi que bien réels !

Pour cela, il était nécessaire de mesurer, avec un sextant de l'époque, les angles aigus que forment entre eux ces objets célestes, lorsque la Lune occupe le sommet de l'angle droit du triangle rectangle que tous trois forment certains jours. On comprend la nécessité du triangle rectangle pour pouvoir appliquer les formules de trigonométrie relative à ce triangle particulier ; mais, les angles ayant été mesurés, reste entier le problème de la valeur des lignes trigonométriques de ces angles sans laquelle le calcul des distances est impossible.
Par exemple, un autre astronome de l'époque d'Hipparque, Aristarque, était parvenu à mesurer l'angle que forme la Terre avec le Soleil et la Lune dans le cas d'une telle configuration ; il avait obtenu 87° avec les outils de l'époque, alors que la valeur exacte est proche de 89,52°.



Mais tant que l'on ne connaissait pas sin. 87° ou cos. 87°, la mesure effectuée ne permettait pas le calcul de la distance Terre-Soleil (la distance Terre-Lune avait été calculée grâce à l'observation des éclipses de Lune).

Pour approcher une solution du problème, Hipparque établit en la démontrant une formule liant le cosinus d'un angle à celui de son double, ou, ce qui revient au même, liant le cosinus d'un angle à celui de sa moitié. Cette formule est la suivante :

$$\cos.^2 a = \frac{1+\cos.2a}{2}.$$

Ainsi, connaissant cos. 30°=$\frac{\sqrt{3}}{2}$, on peut calculer le cosinus de la moitié de cet angle, soit cos. 15°. En effet :

$$\cos.^2 15° = \frac{1+\cos.2\times 15°}{2} = \frac{1+\cos.30°}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

D'où on tire cos. 15°= $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Le résultat trouvé pour cos.^{2} 15° permet d'obtenir sin. 15° grâce à la relation fondamentale de la trigonométrie qui s'écrit ici :
sin.^{2} 15°=1-cos.^{2} 15°.

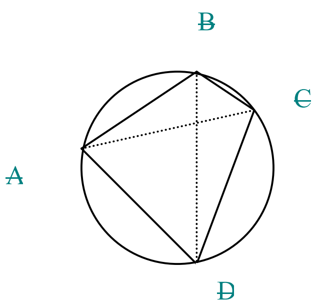
On voit donc que l'on peut continuer ainsi et obtenir les cosinus et sinus d'angles qui sont moitié l'un de l'autre, soit : 7,5°, puis 3,75°, puis 1,875°, etc.

Plusieurs remarques peuvent être faites à propos du résultat d'Aristarque :

- au lieu de démarrer le calcul à partir d'un angle de 30°, on peut partir d'un angle de 45° et obtenir ainsi les cosinus et sinus de 22,5° (d'où l'explication du résultat utilisé plus haut pour sin.22,5°), puis 11,25°, puis 5,625°, puis 2,8125° et ainsi de suite
- les calculs deviennent rapidement fastidieux, notamment lorsqu'on recherche les valeurs approchées des sinus et cosinus des angles ; on peut imaginer leur complexité lorsqu'on ne disposait pas de calculatrices pour obtenir les racines carrées recherchées, ce qui était évidemment le cas jusqu'à une époque récente au regard de l'histoire des mathématiques
- cette complexité des calculs entraîne la recherche de méthodes plus simples de calculs : par exemple la recherche de méthodes permettant d'obtenir plus simplement des racines carrées, elle engage donc des recherches sur d'autres sujets de mathématiques que le sujet initial
- cette méthode ne permet pas d'obtenir les cosinus et sinus de n'importe quel angle ; par exemple, on peut seulement obtenir les valeurs approchées des sinus et cosinus de 3°, en remarquant qu'elle sont comprises entre celles des angles de 2,8125° et de 3,75°, que l'on a pu calculer, et les valeurs pour d'autres angles restent inaccessibles, sauf au prix d'une forte marge d'incertitude, par exemple, pour 37°, le seul encadrement dont on dispose est obtenu avec les angles de 30° et de 45°.

En conclusion, on voit donc que la méthode d'Aristarque nécessite d'être améliorée si l'on souhaite construire des tables de trigonométrie. Pour l'instant, celles-ci restent entachées d'une forte imprécision pour bon nombre de valeurs d'angles, et elles sont construites au prix de calculs qui deviennent rapidement très pénibles.
Il faudra attendre plus de trois siècles pour qu'un autre mathématicien grec, Ptolémée, fournisse vers 190 de notre ère, un théorème qui va permettre d'affiner ces premières tables de trigonométrie.

Ce théorème, dû à Ptolémée et qui porte désormais son nom, est le suivant : “ Dans un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés ”.



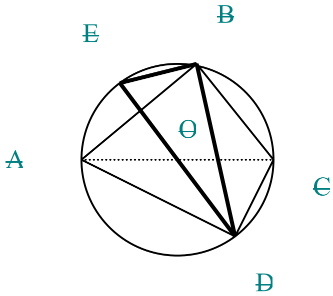
Ainsi, appliqué au quadrilatère ABCD de la figure ci-dessus, le théorème de Ptolémée indique que :
DB×AC=AD×BC+AB×DC

Nous ne donnons pas ici la démonstration de ce théorème qui repose en partie sur des connaissances du programme de 2de ; disons simplement que cette démonstration utilise le théorème de Thalès, le théorème de l'angle inscrit, tous deux au programme actuel de 3^{e}, et des résultats sur les triangles semblables, appelés encore “ triangles de même forme ” dans l'actuel programme de 2de.

On peut se demander quel rapport existe-t-il entre ce théorème et le sujet qui nous occupe ici : la construction par le calcul de tables trigonométriques. En fait, ce théorème permet d'établir un résultat précieux pour le calcul du sinus d'un angle, et donc aussi de son cosinus.

Le voici : sin. (a+b)=sin. a $\times$ cos. b + sin. b $\times$ cos. a.
Ce résultat se démontre actuellement en 1re S par d'autres moyens, en utilisant des notions du programme de cette classe, mais nous allons le démontrer grâce au théorème de Ptolémée qui n'est plus enseigné en France, ni au Collège, ni au Lycée.

En voici donc une démonstration. On reprend la figure du théorème de Ptolémée, mais dans un cas particulier de quadrilatère ABCD convexe inscrit de centre O dont [AC] est un diamètre. On appelle E le symétrique de D par rapport à O.



Dans le triangle DEB, rectangle en B car [ED] est un diamètre du cercle, on a : sin. $D\hat{E}B = \frac{DB}{DE} = \frac{DB}{AC}$.
Dans le quadrilatère ABCD, en appliquant le théorème de Ptolémée, on a : AC$\times$DB =AB$\times$CD+BC$\times$AD.
En divisant par AC^2 l'égalité précédente, on obtient : $\frac{BD}{AC} = \frac{AB}{AC} \times \frac{CD}{AC} + \frac{BC}{AC} \times \frac{AD}{AC}$ (1).

Dans ABC, rectangle en B car [AC] est un diamètre, on a : $\frac{AB}{AC} = \cos.B\hat{A}C$=cos. b et $\frac{BC}{AC} = \sin.B\hat{A}C$=sin. b en posant $B\hat{A}C = b$
Dans ADC, rectangle en D car [AC] est un diamètre, on a : $\frac{CD}{AC} = \sin.D\hat{A}C$=sin. a et $\frac{AD}{AC} = \cos.D\hat{A}C$=cos. a en posant $D\hat{A}C = a$
La relation (1) s'écrit alors : sin. $D\hat{E}B$=cos. b $\times$ sin. a + sin. b $\times$ cos. a = sin. a $\times$ cos. b + sin. b $\times$ cos. a (2).

Or les angles $D\hat{E}B$ et $D\hat{A}B$ sont deux angles inscrits dans le cercle interceptant le même arc BD. Donc ils sont égaux, et la relation (2) s'écrit alors : sin. $D\hat{A}B$=sin. a $\times$ cos. b + sin. b $\times$ cos. a (3).

Or $D\hat{A}B = D\hat{A}C + C\hat{A}B = a + b$ et la relation (3) s'écrit finalement :
sin. (a+b)= sin. a $\times$ cos. b + sin. b $\times$ cos. a (4).

On peut alors calculer les sinus et cosinus d'autres angles quand on sait de plus que :
sin. (-b)=-sin. b et cos. (-b)=cos. b
car alors, la relation (4) donne la relation : sin. (a-b)=sin. (a+(-b))=sin. a $\times$ cos. (-b) + sin. (-b) $\times$ cos. a
et donc : sin. (a-b)= sin. a $\times$ cos. b - sin. b $\times$ cos. a (5).
Cette dernière relation permet par exemple de calculer la valeur exacte de sin. 15° car :
sin. 15°=sin. (45°-30°)=sin. 45° $\times$ cos. 30° - sin. 30° $\times$ cos. 45° et donc :
sin. 15°=$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
On peut alors aussi calculer le cosinus de l'angle en utilisant la relation fondamentale de la trigonométrie.

On voit donc que les relations (4) et (5) permettent, en les combinant, en utilisant la relation fondamentale de la trigonométrie et la relation de duplication démontrée par Hipparque, de progresser dans le calcul exact de sinus et cosinus d'angles, et donc dans l'élaboration d'une table de trigonométrie. Mais, comme on l'a dit, cette entreprise a dû s'étendre sur deux millénaires de recherches mathématiques afin de parvenir jusqu'au XIXe siècle à élaborer des tables de plus en plus précises, puis à inventer des algorithmes de calcul qu'utilisent les calculatrices du XXe siècle qui nous donnent simplement, en appuyant sur des touches, les résultats souhaités.